العنوان:	دراسة نظرية النهايات لبعض التوزعات الهامة
المؤلف الرئيسي:	بركات، مريم سليم
مؤلفين آخرين:	العمر، محمد جنيد، الكريدي، خضر(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2002
موقع:	حلب
الصفحات:	1 - 76
رقم MD:	576184
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة ماجستير
الجامعة:	جامعة حلب
الكلية:	كلية العلوم
الدولة:	سوريا
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	الرياضيات، الاحصاء الرياضي
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/576184

جامعة حلب

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة نظرية النهايات لبعض التوزعات الهامة

هذه الرسالة قدمت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

(إحصاء رياضي)

إعداد الطالبة

مريم سليم بركات

المشرف العلمي

د. محمد جنيد العمر

أستاذ مساعد في قسم

الإحصاء الرياضي ـــ جامعة حلب

المشرف المشارك

د. خضر الكريدي

أستاذ مساعد في قسم

الإحصاء الرياضي ـــ جامعة حلب

حلب 1424 هـ

2002 م

الجمهورية العربية السورية

جامعة حلب

قدمت هذه الرسالة

استكمالاً لمتطلبات نيل درجة الماجستير في الرياضيات

من كلية العلوم ـــ جامعة حلب

المرشحة

مريم سليم بركات

This Theises has been submitted in partial fulfillment of the requirements for M. Sc. degree in Mathematics at the faculty of science . Aleppo University .

Candidate

MARIAM SALEM BARAKAT

الجمهورية العربية السورية

جامعة حلب

تصريح

أصرح بأن هذا البحث " دراسة نظرية النهايات لبعض التوزعات الهامة " لـــم يسبق أن قبل للحصول على أية درجة و لا هو مقدم حالياً للحصول على شهادة أخرى .

التاريخ / / 2002 م .

المرشحة

مريم سليم بركات

DECLARATION

It is hereby declared that this work has not already been accepted for any degree, not is it being submitted concurrently for any other degree .

Date : / / 2002

Candidate

MARIAM SALEM BARAKAT

الجمهورية العربية السورية

جامعة حلب

شهادة

نشـــهد بأن العمل الموصوف في هذه الرسالة هو نتيجة بحث علمي قامت بـــه المرشحة طالبة الدراسات العليا مريم بركات بإشراف الدكتور محمد جنيد العمـــر الأستاذ المساعد في قسم الرياضيات والدكتور خضر الكريدي ــ كلية العلـــوم ــ جامعة حلب ، و أي رجوع إلى بحث آخر في هذا الموضوع موثق في النص .

الدكتور المشرف على الرسالة	الدكتور المشارك
د. محمد جنيد العمر	د. خضر الكريدي

حلب في :   /   / 2002 م .

CERTIFICATION

It is hereby certified that the described in this thesis is the result of the author's own investigations under the supervision of Dr. M. O. JNAID and Dr. KHUDER AL KRADI in the Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Aleppo. And any refrences to other researcher's work has been duly acknowledged in the text .

Candidate	Director of Studies
Dr. KHUDER AL KRIDE	Dr. M.O. JNAID

Aleppo :   /   / 2002 .

إهداء

لمن لا يجاريهم في فضلهم ذوو فضلٍ ، أسرتي الكريمة .

إلى القلة الذين تجمعني وإياهم لغة واحدة .....(أصدقائي)

أهــدي عملــــي هــذا الذي أتمنى أن يكون أســـاســـاً لمرحلة مقبلة فيها الخير والعطاء ...

مريم

كلمة الشكر

أساتذتي الكرام :

لملمتُ أشتات مفرداتي ، لأصوغ عبارات تليق بمقامكم ، لعمري رأيتها أقل بكثير مما أريد ، ولكن لا بدّ لي من التعبير ولو بمعنىً يسيرٍ يجول في خاطري :

لقد كنتم الفضاء الذي لا حد له في استيعاب طموحي ، والبحر من غير شواطئ في عطائه .

علمتموني كيف يعيد الإنسان صياغة نفسه ليكون انساناً ، فبددتم أمواج الضباب في عقلي ، وارتفع فكركم بجلال فوق فكري ، لأنّ ما منحتموني إياه من علم لا يستطيع حتى الموت أن يأخذه مني ومنكم .

أثبتم لي أن العلم هو حياة العقل ، يتدرج بصاحبه من الاختبارات العلمية ، إلى النظريات العقلية ، إلى الشعور الروحي – إلى الله – وباللهِ وحده توفيقي وتوفيقكم.

مريم بركات

المحتويات

لمحة تاريخية

نظــراً لتطور نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي في السنوات الأخيرة ، تطوراً تسابقت فيه الدول في شتى أنحاء العالم لدعم المراكز العلمية ، من أجل تقدم العلوم وتحديــثها بمــا يخدم حركة التطور الاقتصادي والاجتماعي ، والتكنولوجيا وحل القضايا العلمــية والصناعية التي تهدف إلى ترسيخ واستخدام الحلول المثلى خدمة للإنسان الهدف الأســمى فــي الحياة ، ولأجل ذلك كله بدأت نظرية المجموع لمتحولات عشوائية مستقلة تــأخذ حيزاً لا بأس به في الوقت الحالي ،ضمن نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي. كمــا أنَّ نــتائج نظــرية المجمــوع لها استخدامات مباشرة في مختلف المجالات العلمية والعملية .

إنَّ أهــم أبحاث نظرية المجموع لمتحولات عشوائية مستقلة تعود لكبار علماء نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي مثل :

أ.أ. ماركوف – أ.ن. كلماغوروف – س.ف. ناكيف – ن.ف. كيندنكا – أ.أ. براكوف – وباحثون آخرون .

أمــا بناء نظرية المجموع لمتحولات عشوائية مستقلة ومتعلقة بسلسلة ماركوف المتجانســة فــتعود لأبحاث كل من العلماء أ.أ. ماركوف – أ.ن. كلماغوروف – س.ف. ناكيف

ف.د. كرالوك – وباحثون آخرون .انظر [1] , [4], [5], [6], [7] , [11] , [12].

ومــع بدايــة الثمانيــنات بدأت دراسة نهاية توزع المجموع لتوابع عشوائية مرتبطة من الشكل: $k = 1.2,...,n$ ، $Y_k(X_{k-1}, X_k) \geq 0$

حيث $X_{i\ ,\ i=0,1,2,...n,...}$ متحولات عشوائية مستقلة تشكل سلسلة ماركوف المتجانسة [2]، [7]

فــي أواخــر التسعينات من القرن الماضي تم تعميم أهم النظريات المتعلقة بدراسة نهاية تــوزع المجمــوع لمتحولات عشوائية مستقلة $X_{i\ ,\ i=0,1,2,...n,...}$ على توابع عشوائية مرتبطة في الشكل $k = 1,2,....n,..$ ، $Y_k(X_{k-1}, X_k)$

ومــن هــذه الــنظريات – نظرية النهايات المركزية – نظرية دار لينك – نظرية تباين المجموع. انظر [8] , [9] , [25] والنظريات الأكثر أهمية في علم نظرية الاحتمالات والإحصــاء الرياضــي التــي سنهتم بتعميمها على توابع عشوائية مرتبطة ، هي قانون الأعداد الكبيرة(نظرية خنتشين) ، نظرية ماركوف الخاصة بقانون الأعداد الكبيرة .

المقدمة

إنّ الـــدور الكبـــير الـــذي يلعـــبه قـــانون الأعداد الكبيرة في التطبيقات العملية لنظرية الاحـــتمالات، حيـــث يعطينا احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة قريبة جداً من توقعـــه الرياضـــي E[X] شـــريطة محدوديـــة تباين هذا المتحول ،كان لنا حافزٌ لتعميم النظريتين التاليتين :

1–نظرية خنتشين (قانون الأعداد الكبيرة) :

إذا كانـــت $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ متتالية متحولات عشوائية مستقلة ، وذات توزعات متشابهة وتوزع كل منها يطابق توزع المجتمع الإحصائي المأخوذ منه وكان :

$$E|X_1| < +\infty \quad , \quad E[X_1] = \mu \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

فإن :-

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad , \quad n \to \infty$$

وهذا يعني من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right\} \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

انظر المرجع [14] - [16] - [17]

2–نظرية ماركوف :

إذا كانت $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ متتالية متحولات عشوائية وكان :

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{K=1}^{n} X_k \right) \to 0 , n \to \infty \qquad \text{(شرط ماركوف)}$$

عندئذ من أجل أي ثابت موجب $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

– فـــإذا كانـــت المـــتحولات العشوائية $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ مستقلة مثنى مثنى ، فإن شرط ماركوف يصبح بالشكل التالي :

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{K=1}^{n} DX_k \right) \to 0 \quad , n \to \infty$$

انظر المرجع [1] - [17] - [24]

فـــي الحقـــيقة لقـــد تمكنًا من تطبيق هاتين النظرتين على متتالية التوابع العشوائية المســـتقلة، وذات التوزعات المتشـــابهة $k=1,2,\dots,n,..$, $Y_k(X_{k-1},X_k)$ ولكل منها نفس توز ع المجتمع الاحصائي المأخوذة منه ، والمعرفة في الفراغ المقيس(Ω , A x A) والمتعلقة بكل من X,Y .

وحيـــث X_i , $i=0,1,2,\dots,n,\dots$ متتالـــية متحولات عشوائية مستقلة ، وذات توزعات متشابهة معرفة في الفراغ المقيس (Ω ، A) وتابع التوزع لكل منها :

$k=0,1,\dots,n,..$, $A\in$ A , $q(A)=\mathrm{P}\{X_k\in A\}$ حيث A جبر تام على Ω

فإذا رمزنا بـــ $F(u;x,y)$ لتابع التوزع للتابع العشوائي $Y_k(X_{k-1},X_k)$, $k=1,2,\dots,n,..$

لكان $K=1,2,\dots,n,..$ $\quad F(u,x,y)=\mathrm{P}\{Y_k(x,y)<u\}$

وبالتالي لنضع :

$$F(u)=\int_\Omega\int_\Omega F(u;x,y)q(dx)q(dy)$$

$$F(u,x)=\int_\Omega F(u;x,y)q(dy)$$

فتكون تحويلات لابلاس الموافقة بالوسيط الحقيقي الموجب λ هي :

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}dF(u)$$

$$\varphi(\lambda,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda u}dF(u,x)$$

ولنأخذ المجموع : $\overline{S_n}=\sum_{K=1}^{n}Y_k(X_{k-1},X_k)$

نلاحـــظ فـــي هذا المجموع أنّ هنالك ارتباطاً بين هذه التوابع العشوائية بأحد المتحولات X_k, $k=0,1,2,\dots,n,..$ فقط .

ينتج عن ذلك أنّ المجموع $\overline{S_n}$ يمثل مجموع توابع عشوائية مرتبطة ، وبالتالي يمكن صياغة النظريتين السابقتين بالشكل التالي :

3–نظرية خنتشين (قانون الأعداد الكبيرة لمجموع توابع عشوائية مرتبطة):

إذا كانت : $k = 1,2,\ldots,n\ldots$ ، $Y_k(X_{k-1},X_k)$ متتالية توابع عشوائية مستقلة ، وذات توزعات متشابهة وكان :

$$E\left|Y_k\left(X_{k-1},X_k\right)\right| < +\infty \quad , \quad E[Y_k\left(X_{k-1},X_k\right)] = \overline{\mu} \quad , \quad \overline{S_n} = \sum_{K=1}^{n} Y_k\left(X_{k-1},X_k\right)$$

فإنّ :

$$\frac{\overline{S_n}}{n} \xrightarrow{P} \overline{\mu} \quad , \quad n \to \infty$$

هذا يعني من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{\overline{S_n}}{n} - \overline{\mu}\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

4–نظرّية ماركوف لمجموع توابع عشوائية مرتبطة :

إذا كانـت $k = 1,2,\ldots,n\ldots$ ، $Y_k(X_{k-1},X_k)$ متتالـية توابع عشوائية مستقلة ، وذات توزعات متشابهة ولكل منها نفس توزع المجتمع الإحصائي المأخوذ منه مع :

$$E\left|Y_k\left(X_{k-1},X_k\right)\right| < +\infty \quad , \quad E[Y_k\left(X_{k-1},X_k\right)] = \overline{\mu}$$

وكان :

1– $\frac{1}{n^2} D\overline{S}_n \longrightarrow 0 , n \longrightarrow \infty$ (شرط ماركوف)

2 – $\underset{x}{SUP}\left[1-\varphi(\lambda,x)\right] \longrightarrow 0 , \lambda \longrightarrow 0$ حيث λ وسيط حقيقي موجب .

عندئذ من أجل أي ثابت موجب $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{1}{n}\overline{S}_n - \overline{\mu}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

إنّ الطـريقة التي تم بها البرهان على هاتين النظريتين جديدة ومتميزة ، وتتلخص بتقسيم مجموع التوابع العشوائية المرتبطة $\overline{S_n}$ إلى ثلاثة مجاميع $\overline{S'_{n,m}}, \overline{S''_{n,m}}, \overline{S^0_{n,m}}$ أي :

$$\overline{S_{n,m}} = \overline{S'_{n,m}} + \overline{S''_{n,m}} + \overline{S^0_{n,m}}$$

وكـل مـن هـذه المجاميع $\overline{S'_{n,m}}, \overline{S''_{n,m}}, \overline{S^0_{n,m}}$ يمثل مجموع توابع عشوائية مستقلة ، ذات توزعـات متشابهة ، بحيث يمكن أن نطبق على كل من هذه المجاميع النتائج التي توصل

إلـــيها كل من خنتشين وماركوف . ثم بواسطة المتراجحة الشهيرة التالية وذات التطبيقات الواسعة :
من أجل أي متحولين عشوائيين غير سالبين η , ξ ومن أجل أي عددين $u,v \geq 0$ تتحقق المتراجحة التالية :

$$P\{\xi < u - v\} - P\{\eta \geq v\} \leq P\{\xi + \eta < u\} \leq P\{\xi < u + v\} + P\{\eta \geq v\}$$ انظر المراجع [7] - [8] - [9] - [25] .

تمكـــنّاً مـــن الوصول إلى تعميم قانون الأعداد الكبيرة ، ونظرية ماركوف الخاصة بهذا القانون لمجموع توابع عشوائية مرتبطة .

الفصل الأول

دراسة نهاية توزع مجموع متحولات عشوائية مستقلة

- نظريات النهايات -

الفصل الأول

دراسة نهاية توزع مجموع متحولات عشوائية مستقلة

- نظريات النهايات -

(1-1) تمهيد :

من المعلوم أن كل التجارب والمشاهدات والظواهر التي تصادفنا في الحياة العملية اليومية، وفي معظم النشاط العلمي ، يمكن أن تتكرر عدداً كبيراً من المرات تحت ظروف متشابهة ، وفي كل مرة يمكن ملاحظة ما لهذه المشاهدات والتجارب من نتائج ، يعبر عنها بعدد من المواصفات الخاصة التي تأخذ في أغلب الأحيان شكلاً كمياً . والتطبيق الذي ينقل كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية إلى عدد حقيقي ، بحيث تتغير قيمه وفق تغير نتيجة التجربة العشوائية ، ما هو إلا المتحول العشوائي X الذي يتمتع بصفات عددية. حيث تلعب بعض هذه الصفات دوراً هاماً في البراهين على أهم نظريات النهايات، مثل نظرية النهايات المركزية وقانون الأعداد الكبيرة (نظرية خنتشين) -[15] [20], [21]-[22]-[23] .

سنتناول في هذا الفصل دراسة هاتين النظريتين بشكل عام ، ونستعرض الحالات الخاصة لهما . ولكن بداية لابد لنا من إعطاء لمحة سريعة عن أهم الصفات العددية للمتحولات العشوائية في الفقرة التالية :

(1-2)الصفات العددية للمتحولات العشوائية :

التوقع الرياضي (1-2-1)

تعريف(1-2-1):

التوقع الرياضي لمتحول عشوائي Xهو عدد حقيقي ، يرمز له بالرمز $E[X]$ ويعرف في حالة المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته الاحتمالي $f_X(x)$ بالعلاقة التالية :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \quad , \ \forall -\infty < x < +\infty \qquad (1-2-1)$$

كمـــا يعرف في حالة المتحول العشوائي المنفصل X بأنه يساوي مجموع جداءات القيم التي يأخذها المتحول العشوائي X والذي في الاحتمالات الموافقة لها أي أن :

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad (1-2-2)$$

ومن أهم خواص التوقع الرياضي الخاصتان التاليتان :

خاصة (1) :

التوقع الرياضي لمجموع متحولين عشوائيين X,Y يساوي مجموع توقعهما الرياضـي ، وذلك بشرط أن يكون التوقع الرياضي لكل منهما موجوداً أي أن :

$$E[(X+Y)] = E[X] + E[Y] \qquad (1-2-3)$$

هذا ويمكن تعميم هذه الخاصة على عدد منته من المتحولات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$.. بالعلاقة التالية :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \qquad (1-2-4)$$

وذلك بشرط أن يكون التوقع الرياضـي $E[X_i], i = 1,2,....,n$.. موجوداً .

خاصة (2) :

التوقع الرياضي لجداء متحولين عشوائيين مستقلين X.Y يساوي جداء توقعهما الرياضـي أي أن :

$$E[(X.Y)] = E[X].E[Y] \qquad (1-2-5)$$

هذا ويمكن تعميم هذه الخاصة على عدد منته من المتحولات العشوائية المســتقلة مثنى مثنى $X_1, X_2, ..., X_n$.. بالعلاقة :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E[X_i] \qquad (1-2-6)$$

التوقع الرياضي لتابع متغيره متحول عشوائي (1-2-2)

ليكن لدينا التابع $Y = h(X)$ (تابعاً للمتحول العشوائي X).

1- إذا كان X متحولاً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n, ..$ باحتمالات قدرها $P_1, P_2, ..., P_n ...$ على الترتيب وكان $y = h(x)$ فإن :

$$E[Y] = E[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i).P(X = x_i) \qquad (1-2-7)$$

2- إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً تابع كثافته $f_X(x)$ وكان $y = h(x)$ فإن :

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)\, dx \qquad (1-2-8)$$

التباين (1-2-3):

تعريف (1-2-2)

تباين متحول عشوائي X هو التوقع الرياضي للمتحول $(X - E[X])^2$ ويرمز له بالرمز D_X ويعرف في حالة المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته $f_X(x)$ بالعلاقة التالية :

$$D_X = E[(X - E[X])]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)\, dx \quad , \quad \mu = E[X] \qquad (1-2-9)$$

كما يعرف في حالة المتحول العشوائي المنفصل X بأنه يساوي مجموع جداءات مربعات إنحراف قيم المتحول العشوائي عن توقعه الرياضي في الاحتمالات الموافقة ، بأن يأخذ المتحول X هذه القيم أي أن :

$$D_X = E[(X - E[X])]^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \quad , \quad \mu = E[X] \qquad (1-2-10)$$

ملاحظة (1-2-1):

من تعريف التباين للمتحول العشوائي بصورة عامة ، ينتج مباشرة أنه إذا كان X متحولاً عشوائياً فإن :

$$D_X = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad (1-2-11)$$

– تستخدم العلاقة (1-2-11) في بعض التطبيقات العملية .

وإنّ من أهم خواص التباين الخاصتين التاليتين :

خاصة (3) :

إذا كان X متحولاً عشوائياً ما وكان C ثابتاً كيفياً يختلف عن الصفر فإنّ :

$$D(CX) = C^2 . D_X \qquad (1-2-12)$$

خاصة (4) :

تباين مجموع متحولين عشوائيين مستقلين X,Y يساوي مجموع تباين كل منهما أي أن:

$$D(X+Y) = D_X + D_Y \qquad (1-2-13)$$

هذا ويمكن تعميم هذه الخاصة على عدد منته من المتحولات العشوائية المستقلة مثنى مثنى $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

أي أن :

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D_{X_i} \qquad (1-2-14)$$

تعريف تمام التباين (1-2-4) :

ليكـن X,Y متحولان عشوائيان توقعهما الرياضي μ_1 , μ_2 على الترتيب . نعرف تمام تباين هذين المتحولين ونرمز له بالرمز $COV(X,Y)$ بأنه :

$$COV(X,Y) = E(X-\mu_1)(Y-\mu_2) \quad , \mu_1 = E[X] \; , \mu_2 = E[Y] \qquad (1-2-15)$$

ومن تعريف تمام التباين هذا يمكن أن نكتب :

$$D(X+Y) = D_X + D_Y + 2COV(X,Y) \qquad (1-2-16)$$

وبشكل عام من أجل أي متتالية متحولات عشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ نكتب :

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i>j} COV(X_i , X_j) \; , \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1-2-17)$$

مع ملاحظة أن العلاقة (1-2-14) تنتج من العلاقة (1-2-17) في حالة كون المتحولات مستقلة و $X_1,X_2,\dots X_n,\dots$ مستقلة مثنى مثنى .

الإنحراف المعياري (1-2-5) :

تعريف (1-2-3)

يعرف الإنحراف المعياري للمتحول العشوائي X بأنه الجذر التربيعي الموجب لتباين هذا المتحول . ونرمز له بالرمز σ_X ونعرفه بالعلاقة التالية :

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} \qquad (1\text{-}2\text{-}18)$$

ونشير هنا أنّه عادة يرمز لتباين متحول عشوائي X بالرمز σ^2_X ويكون الجذر التربيعي له σ_X هو الانحراف المعياري .

ومن تعريف تمام التباين للمتحولين العشوائيين X,Y نسمي الكمية المعيارية $\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$ بمعاملات الإرتباط بين X,Y بشرط $\sigma_X.\sigma_Y \neq 0$ ونرمز لهذه الكمية بالرمز $\rho(X,Y)$ونعرفها بالعلاقة التالية :

$$\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y} \qquad (1-2-19)$$

ويكون $\rho(X,Y)=0$ إذا كان X,Y مستقلين و $\rho(X,Y)=1$ إذا كان $X=Y$ تربطهما علاقة تابعية .

التابع المميز (1-2-6)

تعريف (1-2-4)

نعرف التابع المميز للمتحول العشوائي X والذي نرمز له بالرمز $\psi_X(t)$ بأنه التوقع الرياضي للمتحول e^{itX} أي أن :

$$\psi_X(t)=E[e^{itX}] \qquad (1-2-20)$$

حيث t عدد حقيقي و $i=\sqrt{-1}$ طويلته تساوي 1 وزاويته قائمة .

فإذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً تابع كثافته $f_X(x)$ فإنّ التابع المميز له يأخذ الشكل التالي:

$$\psi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}.f_X(x)\,dx \qquad (1-2-21)$$

حيث t عدد حقيقي ما و $i=\sqrt{-1}$

أما إذا كان X متحولاً عشوائياً منفصلاً فإن التابع المميز له يأخذ الشكل التالي :

$$\psi_X(t)=\sum_K e^{itx_k}.P(X=x_k) \qquad (1-2-22)$$

حيث t عدد حقيقي ما و $i=\sqrt{-1}$

ومن أهم خواص التوابع المميزة الخاصة التالية :

خاصة (5) :

إذا كان X,Y متحولين عشوائيين مستقلين فإنّ :

$$\psi_{X+Y}(t)=\psi_X(t)\,.\,\psi_Y(t) \qquad (1-2-23)$$

هـــذا ويمكـــن تعميم هذه الخاصة على عدد منته من المتحولات العشوائية المستقلة مثنى مثنى $X_1, X_2, \ldots, X_n$,.. بالشكل التالي :

$$\psi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{X_i}(t) \qquad (1-2-24)$$

<u>نظرية :</u>

ليكن X متحولاً عشوائياً تابع توزعه $F=F(x)$ والتابع المميز له : $\psi_X(t)=E[e^{itX}]$

عندئذ تتحقق العلاقة التالية :

1- $|\psi_X(t)|\le\psi(0)=1$

2- $\psi_X(t)$ متقارب بانتظام بـــ t حيث $t\in]-\infty,+\infty[$

3- $\overline{\psi_X(t)}=\psi_X(-t)$

وذلك مهما تكن $\lambda \geq 0$.

وبالاعتماد على التكامل بالتجزئة للعلاقة (25 - 2 - 1) نحصل على العلاقة التالية :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} F_X(x)dx = \frac{\varphi_X(\lambda)}{\lambda} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (1-2-26)$$

ومن أهم خواص تحويل لا بلاس الخاصة التالية :

٥٦٣٤٨٠

خاصة (6) :

إذا كان X , Y متحولان عشوائيان مستقلان فإنّ :

$$\varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda) \cdot \varphi_Y(\lambda) \qquad (1-2-27)$$

هـذا ويمكـن تعميم هذه الخاصة على عدد منتهٍ من المتحولات العشوائية المستقلة مثنى مثنى $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ بالشكل التالي :

$$\varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(\lambda) \qquad (1-2-28)$$

(3 - 1) الأشكال المختلفة لتقارب متتالية متحولات عشوائية :

كمـا هـو فـي التحليل الرياضي فإنّ مفهوم التقارب في نظرية الاحتمالات لمتتالية من المـتحولات العشـوائية يـأخذ أشـكالاً مختلفة ، ومن أهم أشكال التقارب لهذه المتتالية: (التقارب بالإحتمال - التقارب بالإحتمال واحد - التقارب بالتوزع) [15]- [19] -[26] لتكـن $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ متتالـية مـتحولات عشوائية معرفة على الفراغ الاحتمالي (Ω, W, P) وليكن X متحولاً عشوائياً معرفاً على نفس الفراغ عندئذ :

تعريف (6 - 3 - 1) :

نقول عن متتالية المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ إنها تتقارب بالإحتمال من المتحول العشوائي X فيما إذا كان من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$.

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \ , \ n \to \infty \qquad (1-3-29)$$

يرمز لهذه النهاية عادة بالرمز :

$$X_n \xrightarrow{P} X \ , \quad n \to \infty \qquad (1-3-30)$$

ليكن لدينا $f(x)$ تابعاً ما مستمراً ومحدوداً ، فإذا كانت $X_n \xrightarrow{P} X \ , \quad n \to \infty$
فإنّ :

$$E[f(X_n)] \to E[f(X)] \qquad (1-3-31)$$

إنّ هذه العلاقة تبين لنا بشكل خاص تقارب التوابع المميزة بالشكل التالي :

$$\psi_{x_n}(t) \to \psi_X(t) \quad , \quad t \to 0$$

من أجل جميع قيم t وذلك بملاحظة أن التابع e^{itx} مستمر ومحدود ، وبشكل مشابه ينتج أن تحويلات لابلاس $\varphi_{x_n}(\lambda) \to \varphi_X(\lambda) \ , \ \lambda \to o$.

من أجلّ جميع قيم $\lambda \geq 0$ وذلك بملاحظة أن التابع $e^{-\lambda X}$ مستمر ومحدود .

فإذا كانت $F(x)$, $F_n(x)$ ترمز لتوابع التوزع الموافق لـــ X و X_n على الترتيب فإن العلاقة $(1-3-31)$ تكتب بالشكل التالي :

$$\int f(x)\, d\, F_n\,(x) \to \int f(x)\, d\, F(x)$$

أو :

$$\int f(X_n(w))\, P_n\,(d\,w) \to \int f(X(w))\, P\,(d\,w) \qquad (1-3-32)$$

حيث $P_n(w), P(w)$ القياسات الاحتمالية الموافقة لـــ X ، X_n على الترتيب .
العكس هنا غير صحيح أي تحقق العلاقة $(1-3-31)$ أو $(1-3-32)$ لا يؤدي إلى التقارب بالاحتمال لمتتالية المتحولات العشوائية X_n من المتحول العشوائي X .

تعريف $(1-3-7)$:

نقـــول عن متتالية المتحولات العشوائية $X_1 , X_2 , \ldots , X_n , \ldots$ إنها تتقارب بالإحـــتمال واحـــد (تقريـــباً بشكل أكيد $\pi \cdot H$ أو تقريباً في كل مكان $(\pi \cdot B$ من المتحول العشوائي X إذا كان :

$$P\ \{\ w : X_n \not\longrightarrow X\ \} = 0 \qquad (1-3-33)$$

هـــذا يعني أن مجموعة القيم w من Ω والتي من أجلها $X_n(w)$ لا تتقارب من $X(w)$ يكون احتمالها صفراً .

يرمز عادة لهذا التقارب بالرمز $X_n \xrightarrow{\pi.H} X$. أو $X_n \xrightarrow{\pi.H} X$. عندما $n \longrightarrow \infty$

وهنا نلاحظ أنه إذا كان التقارب بالاحتمال يعني $\lim\limits_{n\to\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] = 0$ وذلك من

أجل أي $\varepsilon > 0$ فإنّ التقارب بالإحتمال واحد يكافئ المساواة التالية :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{k\geq n}|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0 \qquad (1-3-34)$$

في الحقيقة التقارب $n \to \infty$; $X_n \xrightarrow{\Pi.H} X$

يعني على المجموعة $\Omega - N$ حيث البداية من بعض القيم $n = n(w)$

ويمكن أن نكتب : $\sup\limits_{k\geq n}|X_k - X| \leq \varepsilon$

وبالتالي : $\bigcup\limits_{n}\bigcap\limits_{k\geq n}\{|X_k - X| \leq \varepsilon\} = \Omega - N$

بالإنتقال إلىالحادث المتمم يكون لدينا :

$$P(N) = P\left(\bigcup_{n}\bigcap_{k\geq n}\{|X_k - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

وهذا يكافئ الشرط في العلاقة (34 − 3 − 1) .

تعريف (8 − 3 − 1) :

نقــول عن متتالية المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$,.. إنها تتقارب بالتوزع من المتحول العشوائي X ، فيما إذا كان من أجل أي تابع مستمر ومحدود $f(x)$:

$$E[f(X_n)] \to E[f(X)] \ , \ n \to \infty \qquad (1-3-35)$$

يرمز عادة لهذا التقارب بالرمز $n \to \infty$, $X_n \xrightarrow{d} X$

إنّ الشرط في العلاقة (35 − 3 − 1) يكافئ التقارب لتوابع التوزع $F_{X_n}(x)$ من تابع التوزع $F_X(x)$ وذلك من أجل كل قيمة لـــ X حيث التابع $F_X(x)$ مستمراً .

يرمز عادة لهذا التقارب بالرمز $F_{X_n} \Rightarrow F_X$

ويدعى أحياناً هذا التقارب لتوابع التوزع بالتقارب الضعيف .

ملاحظــة (2 − 3 − 1) : مــن أشــكال الــتقارب لمتتالــية المــتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$,.. من المتحول العشوائي X ينتج أن :

$$X_n \xrightarrow{\Pi.H} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

(4 – 1) قانون الأعداد الكبيرة :

يلعـب قـانون الأعـداد الكبـيرة دوراً هاماً في التطبيقات العملية في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي .

إنّ حصولنا على التوزع الاحتمالي لأي متحول عشوائي X يعني حيازتنا على أهم أداة لدراسة سلوك ذلك المتحول ، ذلك لأن التوزع الاحتمالي يعكس لنا قبل كل شيء الصفات العامة للمتحول ، حيث إن ظهور تلك الصفات ما هو إلا نتيجة لتراكم عدد كبير مـن التجارب أو القياسات لذلك المتحول العشوائي . ومن المعلوم أنّ استقرارية الصفات العامـة للعديـد من المتحولات العشوائية معروفة منذ القدم ، وهي تعني أنه مهما كانت الصـفات الفـردية لأي مـتحول فإنها لا تؤثر – تقريباً – على استقرارية الصفة العامة (الوسـطى) لجملـة كبـيرة من المتحولات العشوائية المتشابهة وغير المتشابهة ، وإنّ استقرارية تلك الصفات العامة هي المضمون الفيزيائي لما يسمى الآن بـ (**قانون الأعداد الكبيرة**) والذي ينص على :

إنّ الصفة الوسطى لعدد كبير من المتحولات العشوائية لن تبقى عشوائية ، ويمكن تحديدها عملـياً بدرجة كبيرة من الثقة . وسوف نعرض في هذه الفقرة أهم النظريات المستخدمة لقانون الأعداد الكبيرة مثل نظرية تشيبتشيف ونظرية ماركوف وبعض النظريات الخاصة بهذا القانون [24] .

متراجحة تشيبتشيف (1-4-1) :

مهما يكن المتحول العشوائي X الذي تشتته محدود فإن المتراجحة التالية :

$$P\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2} \qquad (1-4-36)$$

تكون محققة من أجل أي $\varepsilon > 0$ أنظر [17] .

البرهان : إذا كان $F_X(x)$ تابع التوزع للمتحول العشوائي X فإنّ :

$$P\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\} = \int_{|x-E[X]|\geq\varepsilon} dF_X(x)$$

ونعلم أن منطقة التكامل :
$$\frac{|x-\mathrm{E}[\mathrm{X}]|}{\varepsilon} \geq 1$$

وبالتالي يكون :
$$\int_{x-\mathrm{E}[\mathrm{X}]\geq\varepsilon} dF_{\mathrm{X}}(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2}} \int_{x-\mathrm{E}[\mathrm{X}]\geq\varepsilon} (x-\mathrm{E}[\mathrm{X}])^{2}\, dF_{\mathrm{X}}(x)$$

ولكن يمكن اثبات هذه المتراجحة بواسطة تمديد التكامل ليشمل كل قيم x :

$$\int_{x-\mathrm{E}[\mathrm{X}]\geq\varepsilon} dF_{\mathrm{X}}(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2}} \int (x-\mathrm{E}[\mathrm{X}])^{2}\, dF_{\mathrm{X}}(x) = \frac{D_{\mathrm{X}}}{\varepsilon^{2}}$$

وهذا هو البرهان الكامل لمتراجحة تشيبتشيف [17] .